Задача B. Вася в Кунгурской Ледяной Пещере

Рассмотрим i-ый сталагмит, $1 \leqslant i \leqslant n$. Заметим, что после него свет не доходит до всех точек ниже прямой задающейся двумя точками - прожектором $(0, h)$ и вершиной i-ого сталагмита (i, a_i). Это значит, что для всех $j, i < j$ j-ый сталагмит не будет освещён если $a_j \leqslant h + j * (a_i - h)/i$.

Решение на 65 баллов. Для каждого i-ого сталагмита $1 \leqslant i \leqslant n$ будем проверять есть ли среди j-ых сталагмитов перекрывающий свет для нас $1 \leqslant j < i$. Тогда если нет ни одного такого то добавляем наш сталагмит в ответ. Решение за $O(n^2)$

Полное решение. Заметим, что для проверки сталагмита за $O(1)$ необходимо запоминать максимальное значение коэффициента прямой $max = (a_i - h)/i$ до нас. И получаем формулу проверки сталагмита $a_i \leqslant h + i * max$. Теперь наше решение работает за $O(n)$

Задача C. Флаг для столицы

Смотрите разбор задачи H.

Задача D. Поиск за деньги

Применим идеи ДП по подотрезкам: для каждого отрезка от l до r будем хранить за какую минимальную цену можно узнать k если известно что оно в этом отрезке. Тогда, отрезки длины 1 считаются очевидно: в них всегда ответ 0. Дальше, будем идти по возрастанию длины отрезка и более длинные пересчитывать из более коротких так: каждый отрезок можно одним запросом разбить на 2 более коротких количеством способов, равным его длине. Тогда, переберём способы разбить отрезок на более короткие, для каждого считая цену в худшем случае — цена вопроса плюс максимум из цен двух подотрезков. Сложность такого алгоритма $O(n^2)$ по памяти и $O(n^3)$ по времени. Также заметим, что если мы посчитаем ответ для какого-то n, то для более маленьких у нас также есть ответ, хранящийся в ДП, так что можно посчитать ДП для максимального n и дальше отвечать на запросы с помощью этого ДП. Итоговая сложность это $O(N^3 + q)$ по времени $O(N^2)$ по памяти, где N - максимальное n.

Задача E. Столичные номера

Решим задачу динамическим программированием на 70 баллов. Пусть $dp_{i,j}$ - это количество подходящих чисел длины j, заканчивающихся на цифру i. Изначально запишем во все $dp_{i,1} - 1$, для всех i от 1 до 9. Далее для обновлений значения $dp_{i,j}$, будем проходиться по всем $dp_{i_1,j-1}$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant 9$, и к $dp_{i,j}$ будем прибавлять $dp_{i_1,j-1}$, если i и i_1 не взаимно простые, таким образом ответом на задачу будет сумма значений всех $dp_{i,n}$ по всем i от 1 до 9.

Для решения задачи на полный балл используем возведение матрицы в степень, составим матрицу размера 9 на 9, где $mat_{i,j} = 1$, если i и j не взаимно простые. Теперь возведём mat в степень $n - 1$, тогда сумма значений всех клеток матрицы и будет ответом на нашу задачу.

Задача G. Столица для короля

Заметим, что если две точки находятся на одной прямой и находятся на одном расстоянии от какой-то точки на этой прямой, что они симметричны, относительно 3 точки. Тогда заметим, что если есть две точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ и они симметричны, относительно точки $C(x_2, y_2)$, то $x_1 + x_0 = 2 * x_2, y_1 + y_0 = 2 * y_2$, в задаче нам надо найти точку, относительно которой все остальные данные точки симметричны, тогда если сложить все x, то по выше данной формуле мы можем найти координату x искомой точки, поделив сумму всех координат x на n. Аналогично для y. Теперь надо лишь проверить есть ли точка с такими x и y среди данных, и правда ли, что все точки симметричны, относительно её. Это можно сделать множеством способов, например, создав все точки симметричные данным, относительно найденной точки, и если набор этих точек, равен изначальному набору точек, то такая точка существует.

Задача H. Флаг для столицы (Hard)

Решим эту задачу динамическим программированием, пусть dp_i — количество правильных последовательностей заканчивающихся на число i, тогда будем проходиться циклом по массиву, если число на которое мы наткнулись равно 0, то мы скажем, что количество последовательностей заканчивающихся на 0 увеличится на 1. Если же у нас попалось число x, отличное от нуля, то количество правильных последовательностей заканчивающихся на x, увеличится на количество правильных последовательностей, заканчивающихся на $x-1$. Закончив проход по массиву, наш ответ будет лежать в dp_{k-1}.

Задача I. Весёлый Петя

Заметим следующую вещь: Петя не может сделать кучек меньше, чем количество четных чисел на карточках, т.к. никакое четное не может встать в одну кучку с другим. Заметим также то, что если $n > 1$, то всегда можно сделать ровно столько кучек, потому что $1, 2, 3$ можно собрать в одну кучку (если 3 существует), а дальше любое нечётное можно добавлять в кучку к предыдущему четному, т.к. числа, отличающиеся на 1, всегда взаимно просты. А для $n = 1$ ответ, разумеется, 1. Итого, ответ это 1 для $n = 1$ и $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$ для $n > 1$

Задача J. Хроматическое число n-мерного пространства

Задача шутка.

Заметим, что n $(1^{15^{10} \times \pi \times 5} = 1)$, а значит $n = 1$. Для данного n нам уже дали ответ — 2.

Решение — всегда выводим 2.