Разбор задач отборочного этапа краевой олимпиады 2020

Разбор задачи «Настя и точки»

Нетрудно доказать, что две и три точки уложить можно, а четыре и больше – нет.

Разбор задачи «Квадратики»

Заметим, что квадратов размера a существует ровно $(n-a+1)^2$ штук. Переберем все $1 \leq a \leq n$ и просуммируем полученные величины.

Разбор задачи «Свидание»

В задаче требуется найти сумму всех элементов и минимум из них. Тогда если $sum - min \geq k$, ответ YES, иначе NO.

Разбор задачи «Видимые точки»

Точка (x, y) видна из точки $(0, 0)$, если НОД$(x, y) = 1$. Переберем все точки и проверим данное условие.

Решение работает за $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Разбор задачи «Постройка тоннеля»

Воспользуемся методом динамического программирования. Пусть dp_i – ответ для пути из 1 в i, посчитаем его следующим образом. Последний пролет должен заканчиваться в точке с номером i, переберем его начало – точку с номером $j < i$. Тогда, зная dp_j, мы можем легко обновить dp_i. Осталось только проверить, можно ли соединить точки i и j пролетом.

Проверять можно, пробегаясь каждый раз по всем точкам от j до i. В таком случае, решение работает за $\mathcal{O}(n^3)$ и набирает 30 баллов.

Для решения на 100 необходимо просто перебирать j в обратном порядке, то есть от $i - 1$ к 1. Это позволит нам одновременно с перебором проверять, можно ли соединить точки i и j пролетом. Такое решение работает за $\mathcal{O}(n^2)$.

Разбор задачи «Средняя строка»

Нетрудно заметить, что если t не входит в s, ответа не существует. В противном случае нам подходит вся строка s, а значит она и является ответом.

Тогда для решения задачи нам требуется проверить, входит ли строка t в строку s. Это можно очень просто сделать за $\mathcal{O}(|s| \cdot |t|)$.

Разбор задачи «Овощи-фрукты»

Заметим, что имеет смысл перебирать только те b, которые удовлетворяют условию $1 \le b \le 61$, так как $a \ge 2$, а 2^{61} уже содержит больше 17 знаков. Пусть мы зафиксировали какое-то b, тогда нам подходят такие a, что $max(2, \sqrt[b]{10^{k-1}}) \le a \le \sqrt[b]{10^k - 1}$. То есть ответ равен

$$\sum_{b=1}^{61} max\left(0, \left\lfloor \sqrt[b]{10^k - 1} \right\rfloor - max\left(2, \left\lceil \sqrt[b]{10^{k-1}} \right\rceil\right) + 1\right)$$

Для решения нужно уметь искать корень определенной степени. Это можно сделать с помощью двоичного поиска и бинарного возведения в степень.

Еще одним вариантом решения является предварительный подсчет всех семнадцати ответов.

Разбор задачи «Школа танцев»

Обозначим $pref_i$ – количество мальчиков среди i первых детей минус количество девочек среди i первых детей. Посчитаем это значение для всех i (если i-й ребенок – мальчик, то $pref_i = pref_{i-1} + 1$, иначе $pref_i = pref_{i-1} - 1$).

Нетрудно доказать, что отрезок $[l, r]$ подходит нам, тогда и только тогда, когда $pref_l = pref_r$. Переберем r, поддерживая cnt_i – количество левых позиций l таких, что $l \le r$ и $pref_l = i$. Тогда на очередном шаге к ответу нужно прибавить cnt_{pref_r}.

Решение работает за $\mathcal{O}(n \log n)$ или $\mathcal{O}(n)$ в зависимости от реализации.

Разбор задачи «Вкусный торт»

Игра сводится к ниму[1] на $2n$ кучках с камнями. По теореме Чарльза Бутона ответ зависит от XOR-суммы размеров кучек с камнями.

Разбор задачи «Олимпийские флаги»

Построим новый массив d: $d_i = |h_i - h_{i+1}|$ для всех $1 \le i \le n-1$. Задача свелась к задаче о нахождении максимального по длине отрезка, содержащего одинаковые числа, в массиве d. Это легко сделать за $\mathcal{O}(n)$.

Разбор задачи «Аэропорт в Хуснэше»

Для решения задачи требуется для каждой вершины найти самую удаленную от нее. Это можно сделать, запустив обход графа в ширину из каждой вершины.

Решение работает за $\mathcal{O}(n^2)$. Отметим, что для того, чтобы уложиться в ограничение по времени, необходимо написать крайне аккуратную и эффективную реализацию данного алгоритма.

Разбор задачи «Палиндромы»

Решим задачу с помощью динамического программирования по подотрезкам. $dp_{l,r}$ – ответ для подстроки $[l, r]$ (тут мы будем считать, что пустая строка тоже является палиндромом, а в конце просто вычтем 1 из ответа). Для пересчета у нас есть две опции.

Первая – если $s_l = s_r$, то их можно связать в пару, тогда нам подходит любой ответ для подстроки $[l+1, r-1]$, то есть количество способов равно $dp_{l+1,r-1}$.

Вторая опция – не связывать s_l и s_r в пару, тогда нам подходит любой ответ для подстроки $[l, r-1]$ и для подстроки $[l+1, r]$, при этом ответ для подстроки $[l+1, r-1]$ мы учли дважды, то есть количество способов равно $dp_{l,r-1} + dp_{l+1,r} - dp_{l+1,r-1}$.

Просуммировав ответы для этих двух опций, получаем $dp_{l,r}$. Не забываем вычесть 1 при выводе ответа.

[1]https://e-maxx.ru/algo/sprague_grundy

Решение работает за $\mathcal{O}(n^2)$.